Bachelorarbeit
im Studiengang Philosophie

Löst der Neo-Logizismus die Grundlagenkrise der Mathematik ?

FernUniversität Hagen
Institut für Philosophie

Eingereicht von
Rolf Strathewerd

Dezember 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Die Grundlagenkrise der Mathematik

Die „Grundlagen der Arithmetik“ (Fre84) beginnen mit der Frage, was die Zahl 1 sei. Gottlob Frege geht alle ihm bekannten Antwortmöglichkeiten durch und weist jede Einzelne als unzureichend zurück. Das einer der elementarsten Begriffe der Mathematik zwar benutzt wird, aber nicht genau definiert ist, wächst sich zusammen mit weiteren Unzulänglichkeiten, wie die zu seiner Zeit noch wenig formalisierte und eher intuitiv durchgeführte Beweisführung, zu einer Grundlagenkrise der Mathematik aus. Nur auf den ersten Blick scheint dies ein Problem zu sein, das allein die Mathematiker angeht. Denn betrachtet man die aufgeworfenen Fragestellungen genauer, so zeigt sich, daß sie zutiefst philosophisch sind. Die Mathematik durchdringt heute nahezu alle Wissenschaften — nicht nur mehr allein die Naturwissenschaften — und muß daher dringen darüber Auskunft geben, worin ihre Erkenntnisse gründen. Zum Ende des 19. Jahrhunderts hatten sich bereits viele Philosophen und Mathematiker zu diesem Thema geäußert und eine Vielzahl von sich zum Teil widersprechenden Ansichten produziert. In den Grundlagen setzt sich Frege mit vielen dieser Meinungen auseinander und weist in jeder von ihnen Widersprüche nach. Er orientiert sich bei der Einteilung dieser Ansätze grob am Kantschen Urteilsschema.[1] Da er selbst die Mathematik als Tochter der Logik ansieht, als also analytisch, widerspricht er damit zunächst einmal Kant, der die Mathematik als synthetisch apriori ansah. Für eine synthtisch apriorischen Ansatz müßte aus Freges Sicht als Erkenntnisgrund eine reine Anschauung herhalten, die aber schon nicht mehr geleistet werden kann bei der Zahl 100000, geschweige denn bei Zahl oder Größe allgemein.[2] Er vermutet hier bei Kant eine zu enge Auslegung der Urteilskategorie „analytisch“, denn neben den analytischen Urteilen nach Kants Definition, bei denen der Prädikatsbegriff im Subjektsbegriff enthalten ist, sieht Frege noch weitere Urteile als analytisch an, die Kant nicht berücksichtigt, wie z.B. das Existenzialurteil. Er illustriert dies mit Begriffsumfängen in einer Ebene: der Subjektsbegriff ist dann die Schnittfläche aller Bezirke, die die Prädikatsbegriffe bilden. Durch die Grenzziehung wird kein neues Wissen produziert. Dem entgegnet Frege, daß die wirklich fruchtbaren Definitionen der Mathematik, wie die der Stetigkeit, so nicht funktionieren, sondern im Gegenteil völlig neue Grenzen ziehen, deren Konsequenzen vorher

[1] Siehe (Fre84, S.10 f.)
[2] Siehe (Fre84, S.17 f.)

nicht absehbar sind. Da aber derartige Erkenntnisse rein logisch sind, so sind sie auch analytisch.[3]

Eine synthetisch aposteriorische Begründung der Mathematik hält Frege für besonders unsinnig. Dies macht er besonders am Beispiel des Psychologismus deutlich, der auf der Annahme basiert, daß die Denkgesetze der Logik analog zu den Naturgesetzen funktionieren und seelische Vorgänge beschreiben. Damit würde die Logik zu einem Teil der Psychologie. Da auf diese Weise aber der Urteilende selbst im Urteil eine Rolle spielt, reduziert sich der Begriff der Wahrheit auf ein bloßes für-wahr-halten. Daß sich daraus ohne Schwierigkeiten fatale Widersprüche konstruieren lassen, zeigt Frege ebenfalls in den Grundgesetzen. Als Grundlage für die Mathematik jedenfalls wäre eine derartig aufgefasste Logik untauglich, denn sie wäre etwas persönliches, das bei jedem anders aussehen könnte und würde durch die sich daraus ergebenden Widersprüche jeden Sinn verlieren.[4]

Parallel zum Logizismus entwickelte David Hilbert den Formalismus, der zwar ebenfalls streng analytisch ist, aber nach Freges Meinung völlig inhaltsleer ist:

> Zuweilen scheint man die Zahlzeichen wie Schachfiguren anzusehen und die sogenannten Definitionen als Spielregeln. Das Zeichen bezeichnet dann nichts, sondern ist die Sache selbst. (Fre93, S.XIII.)

Dagegen setzt Frege, daß selbst eine so triviale Aussage wie „$3^2 + 4^2 = 5^2$“ einen Gedanken bezeichnet und nicht nur eine leere Regelanwendung darstellt. Für ihn ist der Mathematiker jemand, der etwas Vorhandenes erforscht und kein Erfinder; Definitionen erschaffen ebensowenig ein mathematisches Objekt, wie Geographen ein Meer erschaffen indem sie es benennen und seine Grenzen festlegen. Der Mathematiker soll also ein Forscher sein, der neues Wissen allein mit den Mitteln der Logik findet. Aber Frege scheiterte mit seinem Programm und die von ihm ausgerufene Grudlagenkrise wurde nicht beigelegt.

Zwar entwickelte sich in den Jahrzehnten danach die Logik und die Metamathematik erheblich weiter, so daß beispielsweise Beweise heute nur noch dann Geltung beanspruchen können, wenn sie streng formal und nicht intuitiv geführt werden, aber die Frage nach der Grundlagen der Mathematik bleiben nach wie vor umstritten. So spricht auch noch 1921 der Formalist Weyl

[3] Siehe (Fre84, S. 55 f.)
[4] Siehe (Fre93, S. XV ff.)

von einer Krise. Und trotz noch weiterer im Laufe der Jahre vorgeschlagenen Antworten, sind nach wie vor nicht nur die ontologischen und epistemischen Grundlagen der Mathematik umstritten.

Ein neuerer Beitrag zu dieser Debatte stammt von Edward Zalta, der versucht mathematische Systeme ontologisch auf Metaphysik zu reduzieren (Zal00). Das dazu von ihm entwickelte philosophische System nennt er — allerdings mit einem Fragezeichen versehen — Neo-Logizismus.

In diesem Text werde ich versuchen den Ansatz von Zalta in zweierlei Hinsicht zu bewerten. Zunächst stellt sich die Frage, inwieweit es sich tatsächlich noch um ein logizistisches Projekt handelt. An zweiter Stelle steht dann die weitergehende Beurteilung, ob dieser Neo-Logizismus tatsächlich die Grundlagenkrise lösen kann oder doch wenigsten einen Teil der Grundlagenproblematik lösen kann.

Um zu diesen Beurteilungen kommen zu können und die zu lösenden Probleme genauer herauszuarbeiten, werde ich zunächst in Abschnitt 2 die drei klassischen Lösungsversuche und ihr Scheitern skizzieren.

Darauf folgt in Abschnitt 3 eine Darstellung von Zaltas Ansatz. Den Schluß bilden in Abschnitt 4 und 5 die oben geschilderten Bewertungen und Einschätzungen.

2 Die klassischen Lösungsversuche

2.1 Der Logizismus[5]

Einen Teil der von Frege aufgeworfenen Fragen konnten von ihm selbst gelöst, bzw. ihre Beantwortung wesentlich weiter getrieben werden. So hat er durch den Aufbau des Prädikatencalculus die formale Beweisführung einen wesentlichen Schritt voran bringen können. Die Arithmetik war im 19. Jahrhundert zwar auf den ersten Blick schon recht weit entwickelt, aber ihre Beweisführungen basierten eher auf Intuition und gefühlter Evidenz. Ihre Grundlagen interessierten nur wenige Mathematiker. Einer von ihnen war Gottlob Frege. Als Leitbild schwebte ihm die Geometrie vor, die sich seit Euklid nur weniger Axiome bediente um aus diesen ihr gesamtes Satzgebäude zu entwickeln. Da als Axiome die Sätze gelten, die eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind, würde ein axiomatisches System eine unerschütterliche Grundlage auch für die Arithmetik bilden. Aber Frege geht noch über Euklid hinaus indem er in den *Grundgesetzen* (Fre93) fordert, daß auch die Schluß– und Folgerungsweisen vor einer Ableitung aufgeführt werden.

Programm

Der Logizismus geht davon aus daß die Logik die allgemeinste Wissenschaft ist und somit auch nur sie als absolut sicher angesehen werden kann. Nach Frege ist es die Aufgabe der Logik die Gesetze des Wahrseins zu erkennen. Dies unterscheidet er strikt von einem bloßen für-wahr-halten, was er wie oben bereits angesprochen als Aufgabe der Psychologie zuweist. Für die Grundlegung der Mathematik bedarf es dagegen der unveränderlichen Gesetze des Wahrseins, die allein die Logik liefern kann. Sie gibt dem Forscher die Hilfsmittel an die Hand, mit deren Hilfe er über die Anerkennung der Wahrheit von Behauptungen entscheidet. Behauptungen wiederum sind das Ergebnis von Urteilen, die ihrerseits dem Denken entspringen. Fazit dieser Argumentationskette ist, daß Gedanken etwas sind, bei dem Wahrheit in Frage kommt.

Aber Frege geht bei der Charakterisierung des Begriffs „Gedanke" noch erheblich weiter. Nach seiner Auffassung sind sie auch etwas vom Subjekt unabhängiges, etwas, das durch das Denken erfasst und nicht erzeugt wird. Gedanken kommt schon allein dadurch eine Wirklichkeit zu, daß sie unser

[5] Siehe (Ste01; Fre84; Fre18; Zal04).

Handeln beeinflussen. Sie können daher nicht zur Innenwelt gehören. Da sie nicht sinnlich wahrnehmbar sind, können sie allerdings auch nicht zu Aussenwelt gehören. Letztlich postuliert Frege für den Ort der Gedanken ein „drittes Reich“.

Diese epistemische und ontologische Einordnung von Gedanken ist von weitreichender Bedeutung, da auch die Mathematik in Gedanken vollzogen wird. Ein Beispiel dafür ist der Satz des Pythagoras, der zeitlose Geltung besitzt und weder der Innen-, noch der Aussenwelt zuzuordnen ist. Für die Prüfung der Behauptungen, die der Satz des Pythagoras aufstellt, wird genauso wie allgemeineren Fall bei der Prüfung der Sätze der Arithmetik die Logik gebraucht.

Die Ableitbarkeit der Arithmetik aus der Logik meint also nicht, daß die Arithmetik analytisch im Sinne von Inhaltsleer ist. Gemeint ist vielmehr, daß die einfachst möglichen mathematischen Objekte und Axiome benutzt werden und daraus allein mit logischen Mitteln die Arithmetik hergeleitet wird. Als alleinige Erkenntnisquelle wird nur das vernünftige Denken anerkannt. Sobald also die Grundlagen gewählt sind, werden nur noch analytische — also tautologische — Umformungen zugelassen.

Humes Prinzip[6]

Wie oben schon erwähnt hatte Frege alle bisherigen Definitionsversuche des Begriffs Zahl verworfen. Nachdem er also festgestellt hat, daß Zahlen weder gewöhnliche Dinge, noch Anschauungen oder Vorstellungen sind, wählt er einen völlig neuen Ansatz: Zahlen, oder genauer Anzahlen werden als Begriffe betrachten, die erst im Kontext eines Satzes ihren Sinn erhalten. Mit einem modernen Begriff ließe sich dieses Verfahren auch als *linguistic turn*[7] bezeichnen.

Dazu unterscheidet er zwischen Funktionen und Objekten. Für die Funktionen erweitert er die aus der Mathematik bekannte Methodik, bei der eine Funktion ein Argument aus der Wertemenge in die Bildmenge abbildet. Als Werte, bzw. Argumente werden beliebige Objekte benutzt und die Funktion f(x) bezeichnet dann einen komplexen Namen. So lässt sich beispielsweise Paris auch als komplexer Name schreiben, indem die Funktion Hauptstadt(x) mit

[6] Stepanians gibt in (Ste01) im 4. Kapitel in § 10 bis § 15 eine Einführung in Humes Prinzip und die Konsequenzen für Freges Theorie. Ich folge hier grob seiner Darstellung, greife bei der Beschreibung von Begriffsumfängen und Wertverläufen auf (Zal04) und (Fre84) zurück.

[7] Siehe (Ste01, S. 76.)

dem Argument Frankreich instanziert wird. Als Begriffe definiert Frege nun die Untermenge der Funktionen, die entweder auf das Wahre oder das Falsche abbilden.

Die Anwendung auf Anzahlen zeigt sehr gut ein Beispiel von Frege selbst [8]: Bei „der Wagen des Kaisers wird von vier Pferden gezogen“ ist „Pferde, die den Wagen des Kaisers ziehen“ der Begriff und die Anzahl „vier“ das Argument, mit dem die Funktion auf das Wahre abbildet. Von Zahlen redet Frege also in dem Sinne von „Die Anzahl x kommt dem Begriff F zu“. Er beantwortet also die Frage nach dem epistemischen Zugang zu Zahlen mit einer Erklärung des Sinns des Gebrauchs von Zahlwörtern. Um die Anzahl und damit den Begriff der Zahl zu definieren, muß zunächst ein Identitätskriterium gefunden werden, das klärt unter welchen Voraussetzungen

die Anzahl der F = die Anzahl der G

Frege tut dies, indem er die Aquivalenz des obigen Satzes zu dem Folgenden postuliert:

die F sind ein-eindeutig den G zuordenbar

Diese Äquivalenz ist auch als Humes Prinzip bekannt. Das Problem an Humes Prinzip steckt im Identitätskriterium. Um die Identität der Anzahlen links und rechts des Gleichheitszeichens festzustellen, müssen sie bereits als Anzahlen bekannt sein. Oder wie es Frege illustriert: es muss bekannt sein, daß Julius Cäsar keine Anzahl ist. Die Antwort auf dieser in der Literatur unter dem Namen Cäsar-Problem geführten Frage versucht Frege zu geben, indem er die Begriffsumfänge und die Wertverläufe von Funktionen einführt.

Wertverläufe halten in Form von geordnete Paaren fest, auf welchen Wert eine Funktion jeweils ein bestimmtes Argument abbildet. Betrachtet man nur die Wertverläufe, die von Funktionen gebildet werden, die auf das Wahre oder das Falsche abbilden, so spricht man von Begriffsumfängen. Einfacher gesagt ist ein Begriffsumfang die Menge all der Objekte, die unter einen Begriff fällt.

Ersetzt man mit Frege „ein-eindeutig zuordenbar“ durch „gleichzahlig“, so ergibt sich damit :

Die Anzahl der F $\equiv$ Umfang des Begriffs „Gleichzahlig mit F“

[8] Siehe (Fre84)

Das wegen seiner zerstörerischen Wirkung auf Freges Werk berüchtigte Grundgesetz V besagt nun, daß der Wertverlauf einer Funktion f dann und nur dann identisch mit dem Wertverlauf einer Funktion g ist, wenn f und g alle Objekte auf dieselben Werte abbilden.

Anders gesagt wird die Anzahl der Gegenständen in einer Menge M definiert als das, was alle andern möglichen Mengen mit M gemeinsam haben. Die Gleichzahligkeit wird demgemäß als ein-eindeutige Abbildung verstanden. Wie Russell bemerkte, lässt sich daraus ein Widerspruch ableiten. Dazu konstruierte er die Menge all der Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Die Frage, ob diese Menge sich selbst als Element enthält oder nicht, führt zu einer Kontradiktion.

Statt dem Wort Menge kann hier natürlich auch mit Frege von Begriffsumfängen gesprochen werden; das Ergebnis bleibt dasselbe. Da er sich ausserstande sah sein logizistisches Programm ohne die Verwendung von Begriffsumfängen durchzuführen, mußte er seinen Ansatz als gescheitert ansehen.

Auch Frege war schon klar, was spätere Analysen bestätigten: Startet man bei Humes Prinzip, so lassen sich die Dedekind-Peano-Grundgesetze ohne Rückgriff auf Begriffsumfänge und Wertverläufe herleiten. Dieser als Freges Theorem bekannte Teil seines Werkes gilt heute als unstrittig, da er das Grundgesetz V nicht mehr benötigt und tatsächlich mit rein logischen Mitteln durchgeführt werden kann. Die dabei vollbrachte Leistung ist allerdings eher eine mathematische als eine philosophische. Denn der wesentlich größere Teil des philosophischen Gehalts liegt in der Herleitung eben dieses Humeschen Gesetzes. Denn hier geht es um die eigentlichen Grundlagen der Mathematik. Frege hatte gehofft mit den Begriffsumfängen die Lücke zwischen Aussagen über Gegenstände (die mit Begriffen verknüpft sind) und Aussagen über Begriffe auf rein logischen Weg zu schließen. An dieser Stelle ist er gescheitert.

2.2 Der Formalismus

Eine Reaktion auf das logizistische Programm ist der Formalismus, der maßgeblich durch David Hilbert vertreten wird.[9] Er entwickelt seinen Ansatz aus der Auffassung, daß die Objekte der Mathematik intuitiv der unmittelbaren Anschauung gegeben sind und als solche sogar ausserhalb der Logik stehen. Sie sind weder Begriffe, wie es der Logizismus behauptet, noch platonische

[9] Für die folgende Darstellung siehe hauptsächlich (Zac03) und (Raa03b, Abschnitt 1).

Objekte. Aber sie sind auch nicht — und damit wird dem etwa zeitgleich entwickelten Intuitionismus widersprochen — lediglich geistige Konstruktionen. Die aus diesen Objekten abgeleitete Mathematik sollte aufgrund des ausserlogischen Status ihrer Objekte darüber hinaus auch garantiert widerspruchsfrei sein, denn damit ein Widerspruch entstehen kann, muß ja zunächst einmal die Logik Geltung besitzen.

Indem Hilbert diese unmittelbar gegebenen Objekte als Zeichen identifiziert, entwarf er eine Interpretation des Formalismus, die bis heute vorherrschend ist. Mit den Zeichen, beispielsweise einfache Striche, lassen sich primitive Operationen wie Verketten oder Vergleichen durchführen. Diese Operationen wiederum sind als (natürlich widerspruchsfreies) axiomatisches System formuliert. Eine wichtige Aufgabe der Metamathematik besteht dann darin, die Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems nachzuweisen. Dazu müssen nicht nur die bekannten Paradoxa ausgeschlossen werden, sondern es muss gezeigt werden, daß Widersprüche in dem untersuchten Axiomensystem generell ausgeschlossen sind.

Die Widerspruchsfreiheit hat natürlich nicht nur wegen Russells Paradox und seine desaströse Wirkung auf den Logizismus einen hohen Stellenwert, sondern auch allein dadurch, daß aus einer widersprüchlichen Theorie jede Aussage ableitbar ist und sie damit nutzlos wird. Die Schlüsselrolle, die Hilbert ihr zuweist, wird bereits 1899 deutlich, als in einem Brief an Frege eine der grundlegenden Positionen des Formalismus formuliert: „Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und Existenz.“ [10] Hilbert war also der Überzeugung, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit eines mathematischen Systems ausreichend ist um sowohl seine Existenz, als auch seine Wahrheit zu beweisen.

Da der unmittelbaren Anschauung nur endliche Entitäten zur Verfügung stehen, nahm Hilbert einen finitistischen Standpunkt ein [11]: Es sind insbesondere bei den Beweisen nur Verfahren zulässig, deren Endlichkeit klar ist. Eine Behauptung wie $n + 1 = 1 + n$ wird auf diese Weise problematisch, da sie nicht für alle natürlichen Zahlen geprüft werden kann. Hingegen kann ein rekursiver Algorithmus der beispielsweise das prim-sein prüft als finit anerkannt

[10] Zitiert nach (Pec02).
[11] Siehe (Zac03, Abschnitt 2)

werden, wenn gezeigt werden kann, daß er unabhängig vom gewählten n immer in endlich vielen Schritten zu einem Ergebnis kommt. Allerdings wurden von Hilbert niemals genaue Kriterien für das finit-sein definiert, so daß es in einigen Fällen zu Diskussionen kam.

In seiner strengsten Form klammert der Formalismus alle ontologischen und epistemischen Fragen aus. Mathematik wird reduziert auf ein Spiel, bei dem Axiome und Ableitungsregeln vorgegeben werden und es die Aufgabe des Spielers (Mathematikers) ist aus diesen beiden Bausteinen neue Theoreme herzustellen. Da Zahlen auf diese Weise auf reine Symbole, die lediglich zur Herstellung von Symbolketten gebraucht werden, reduziert werden, hat ein Fragen nach ihrem ontologischen Status keinen tieferen Sinn mehr. Mathematische Objekte sind tatsächlich nur noch Zeichen, die ihrer Zeichenbedeutung entkleidet sind.[12] Sie sind, bzw. bezeichnen keine abstrakten Objekte. In diesem Zusammenhang kann nicht einmal mehr von der Herleitung von Beweisen gesprochen werden, sondern nur noch von Zeichenproduktionen. Mathematik wird damit zu einem algorithmischen Verfahren, in dem Logik-frei nur nach syntaktischen Regeln Zeichenketten produziert werden. Widersprüche innerhalb des Systems scheinen daher nicht möglich zu sein. Die Sterilität dieser Vorgehensweise zog schnell Kritik auf sich und ist auch philosophisch uninteressant.

Von vorne herein wurde von Zeitgenossen Hilberts kritisiert, daß bei diesem Verfahren nicht mehr von der Wahrheit des Systems, sondern nur noch von dessen Konsistenz gesprochen werden kann. Und genau bei dieser Konsistenz setzte 1930 Kurt Gödel an. Er wies nach, daß jedes hinreichend mächtige formale System entweder unvollständig oder widersprüchlich ist. Die hinreichende Mächtigkeit bezieht sich hauptsächlich darauf, daß mit dem jeweiligen System eine Nummerierung möglich sein muß. Dies ist bereits für das einfache System der die Peano-Arithmetik gegeben.

Gödel führte den Beweis der Unvollständigkeit formaler Systeme, indem er allen Sätzen dieses Systems eine eindeutige Zahl zuordnete.[13] Dann konstruierte er analog zum Cantorschen Diagonalverfahren eine Aussage „Der Satz Nummer x ist nicht beweisbar“ und setzte für x die Nummer eben die-

[12] Dies ist die Kritik, die nach (Pec02, S. 6) Oskar Becker an Hilbert übt. Aber auch in den anderen Quellen findet sich diese Kritik in ähnlicher Form.

[13] In (Hof79) wird der Beweis in Kapitel XIV durchgeführt. Bei Hofstadter geschieht dies allerdings aufgrund einer anderen Fragestellung: Sind digitale Computer in der Lage Intelligenz zu entwickeln?

ses Satzes ein. Der Satz sagt dann beweisbar aus „Ich bin nicht beweisbar". Durch den „Trick", daß er mit den Mitteln des jeweiligen formalen Systems Meta-Aussagen über dasselbe System konstruierte, konnte Gödel zeigen, daß eine formales System nicht zum Beweis seiner eigenen Widerspruchsfreiheit genutzt werden kann.

Damit aber war der Formalismus in seiner ursprünglichen Form gescheitert. Es war nun klar, daß die Principia Mathematica nicht in ihrem eigenen System bewiesen werden konnte.

Neuere Entwicklungen

Nach 1930 mußte der Formalismus seine Forderungen zwangsläufig herunterschrauben. So bezweifelt die moderne Beweistheorie nicht mehr die prinzipielle Unvollständigkeit mathematischer Systeme, sondern bewertet diese nur noch mit Hilfe einer Maßzahl. Zudem ist der Formalismus auch philosophisch weiterentwickelt worden, da er von Mathematiker noch am ehesten akzeptiert wird. Dies liegt unter anderem am Deduktionismus [14], der dem alten Vorwurf der Inhaltsleere aus dem Weg geht, indem er feststellt: Wenn man den Axiomen wahre Behauptungen zuordnet und unter der Voraussetzung, daß die Ableitungsregeln wahrheitserhaltend sind, dann müssen auch alle abgeleiteten Theoreme wahr sein. Die Entdeckung von Isomorphismen zwischen Axiomen und Behauptungen überlassen die Mathematiker den Philosophen, während sie selbst sich unbelastet den Axiomen und Ableitungen von Theoremen widmen können.

Radikaler stellt sich demgegenüber eine unter anderem von Peckhaus (Pec02) vorgetragene Ansicht dar, die bestreitet, daß es sich beim Formalismus überhaupt um einen gegenüber dem Logizismus und dem Intuitionismus eigenständigen Standpunkt handelt. Es ist seine bereits erwähnte ontologische Neutralität, die verhindert, daß er nicht gleichberechtigt neben den anderen Ansichten steht.

2.3 Der Intuitionismus

Der Intuitionismus geht zurück auf L.E.J. Brouwer und Arend Heyting. Aus Brouwers Sicht ist Mathematik eine freie Tätigkeit des Geistes, die er in An-

[14] Siehe (Ver04)

lehnung an Kant als reine Anschauung der Zeit sieht. [15] [16] Die Sprache spielt bei mathematischen Tätigkeiten zunächst keine Rolle, da sie allein im Denken stattfindet. Sie hat lediglich mitteilenden Charakter und wird damit erst im intersubjektiven Handeln wichtig. Erst an dieser Stelle tritt nun die Logik auf den Plan: während die Mathematik sich im weitesten Sinne auf die Analyse von Mustern konzentriert, ist es die Aufgabe der Logik die sprachliche (formale) Wiedergabe dieser Muster zu untersuchen. Dies wird als eine Möglichkeit angesehen die Arbeit des Verstandes zu erforschen. Logik wird so zu einem Teilgebiet der Mathematik. Damit wird die Idee Freges die Mathematik aus der Logik abzuleiten auf den Kopf gestellt.

Aus der Ansicht, daß Mathematik sich allein mit im Geist konstruierbaren Objekten befasst, folgt in Hinblick auf die Endlichkeit des menschlichen Denkens die programmatische Forderung nach der Entscheidbarkeit von Sätzen. Diese Forderung führt in der Konsequenz zur Ablehnung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten. Der Intuitionismus bringt sich so auf der einen Seite in Opposition zur klassischen Mathematik, führt aber auf der anderen Seite auch zu der Entwicklung einer eigenen Logik. Sie wurde maßgeblich von Heyting erarbeitet.

Ablehnung des Tertium non datur[17]

Ein wesentlicher Punkt in Brouwers Werk ist wie bereits angesprochen die Ablehnung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten. Um eine Aussage über die Wahrheit der Disjunktion $P \vee Q$ zu treffen, muß entweder die Wahrheit von P oder die Wahrheit von Q bewiesen werden. Dies führt zu Problemen, wenn für Q $\neg P$ eingesetzt wird, denn Brouwer bestreitet, daß aus $P \vee \neg P$ immer Kontradiktionen abgeleitet werden können. Der Grund für seine Ablehnung läßt sich einfach anhand der Goldbach Vermutung illustrieren :

[15] Bishop charakterisiert die Einstellung der Konstruktivisten mit „The primary concern of mathematics is number, and this means the positive integers. We feel about number the way Kant felt about space. The positive integers and their arithmetic are presupposed by the very nature of our intelligence and, we are tempted to believe, by the very nature of intelligence in general. The development of the positive integers from the primitive concept of the unit, the concept of adjoining a unit, and the process of mathematical induction carries complete conviction. In the words of Kronecker, the positive integers were created by God.“ Zitiert nach (Bri03)

[16] Siehe Abschnitt *Brief Characterization of Brouwer's Intuitionism* in (Att03)

[17] Siehe Abschnitt *Brouwer's Development of Intuitionism* in (Att03) und Abschnitt *Introduction* in (Bri03)

> Jede Zahl, die größer als Zwei ist, kann als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden. [18]

Da diese Vermutung nach wie vor nicht entschieden ist und ihr Wahrheitswert daher nicht bestimmt werden kann, ist es somit auch nicht möglich eine Aussage über die Wahrheit der Disjunktion zu treffen. Die klassische Mathematik löst dieses Problem der Nicht-Entscheidbarkeit, indem sie $P \vee Q$ interpretiert als $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$. Das ist zwar praktisch und auch durchaus sinnvoll, hat aber in den Augen der Intuitionisten den entscheidenden Nachteil, daß hier Aussagen über etwas getroffen werden, wovon man keine wirkliche Kenntnis hat. Der klassischen Interpretation haftet so gesehen ein Hauch von Idealismus an.

An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, daß bei endlichen Mengen kein Problem mit den Tertium non datur auftreten kann, da dann einfach alle Fälle aufgezählt und eine Entscheidung getroffen werden können. Die Schwierigkeiten liegen wie so oft in infiniten Mengen begründet, wo die Entscheidung durch eine Aufzählung eben nicht möglich ist. Es ist schlicht unmöglich durch Betrachtung der möglichen Fälle eine Entscheidung zu treffen, da unendlich viele Fälle gegeben sind.

Da dadurch gezeigt wird, daß in der klassischen Logik ein Prinzip enthalten ist, daß in der Mathematik nicht anwendbar ist, wird nach Ansicht der Konstruktivisten das Primat der Mathematik über die Logik begründet.

Der Existenzquantor

Die Art, wie die klassische Mathematik das Problem der Nicht-Entscheidbarkeit bei Disjunktionen zu lösen versucht, beeinflusst unmittelbar ihre Interpretation des Existenzquantors. $\exists x P(x)$ meint für sie $\neg \forall x \neg P(x)$. Aber auch das ist eine idealistische Interpretation, denn für den Nachweis der Existenz ist es auf diese Art und Weise nicht erforderlich auch nur ein Element anzugeben, das von der Funktion P erfüllt wird. Oder wie es auch formuliert wurde: Die klassische Mathematik erzählt uns etwas über die Existenz eines Schatzes, ohne zu sagen wo er liegt. Der Intuitionismus wehrt sich gegen diesen Idealismus und fordert, daß mindestens ein Element aufgewiesen werden muss, welches die betreffende Funktion erfüllt.

[18] Zitiert nach (Bri03) : *Every even integer >2 can be written as a sum of two primes, ..*

Intuitionistische Logik[19]

Der Existenzquantor und der Oder-Operator sind nicht die einzigen Gebiete, in denen sich die intuitionistische von der klassischen Logik und mithin auch von Fregeschen Logik abgrenzt. Grundsätzlich sahen Brouwer und Heyting die Logik ja als etwas, das aus der Mathematik abstrahiert wird. Dabei machte die klassische Logik ihrer Ansicht nach den Fehler sich allein auf endliche Mengen zu beschränken. Bei dem Umgang mit Quantoren und der Implikation wird aus der Forderung nach Konstruierbarkeit die technische Forderung nach der Angabe eines finiten Beweis-Algorithmus.

Aktuelle Entwicklungen[20]

Der aktuelle Konstruktivismus ist unter anderem mit Bishop verbundenen. Er rekonstruierte ein großen Teil der Analysis auf Basis der intuitionistischen Logik, also ohne Verwendung des Tertium non datur. Aber der Gedanke der Konstruierbarkeit wird hier noch weiter bis hin zu einer algorithmischen Mathematik getrieben. Die Anwendung des All-Quantors in $\forall x P(x)$ meint dann eine Verfahrensvorschrift zu konstruieren, die angewendet auf ein Objekt x zeigt, daß P(x) wahr ist. Der Gedanke der Konstruktion wird in dieser algorithmischen Form zu einer reinen Methodologie. Alle ontologischen Erwägungen, die für Brouwer noch ein wesentliches auslösendes Moment bei der Entwicklung des Intuitionismus waren, werden fallengelassen. Es bleibt eine epistemische und sich nur noch auf die Methode konzentrierende Praxis.

Abgrenzung zum Logizismus und Formalismus

Da die Logik von Brouwer und Heyting als Teilgebiet der Mathematik eingeordnet wird, wird folgerichtig dem Logizismus eine Absage erteilt. Da darüber hinaus auch die Zahlen nur als Konstruktionsergebnisse angesehen werden, findet eine Verlagerung von Freges drittem Reich in das Denken statt. An dieser Stelle sollte darauf hingewiesen werden, daß Existenz für die intuitionistische Theorie nur die Konstruierbarkeit im Geiste meint, nicht den Nachweis eines wie auch immer gearteten Objektes. Als Wahrheit wird allein das akzeptiert, was von einem Individuum durch gedankliche Konstruktion als wahr erfahren

[19] Für eine detailiertere Diskussion siehe Abschnitt *Constructive Interpretation of Logic* in (Bri03)

[20] Siehe Abschnitt *Varieties of Constructive Mathematics* in (Bri03)

werden kann. „Das Wahre“, das im Logizismus noch absolute Geltung besaß, wird damit reduziert auf das Endergebnis eines gedanklichen Prozesses.[21]

In der Auseinandersetzung mit dem Formalismus, den Brouwer als zu inhaltsarm ansieht, setzte er sich intensiver mit dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten auseinander, das er in der Folge auch verwirft. Aus Sicht des Formalismus — und das sagte Hilbert sehr deutlich und trifft damit sicher auch Freges Meinung — war dieser Verzicht barer Unsinn.[22]

Ursprünglich waren für David Hilbert mathematische Objekte „Gedankendinge“[23], eine Auffassung, die er mit vielen Zeitgenossen teilte. Alle mathematischen Objekte (Zahlen, Geraden, Punkte, etc.) werden durch das Denken erschaffen, sind also kognitive Schöpfungen. Symbole bezeichnen diese Objekte und objektivieren diese Schöpfungen dadurch, daß sie der intersubjektiven Mitteilung dienen. Erst durch die Symbolproduktion wird die Mathematik objektiv, d.h. unabhängig vom Geist eines einzelnen Subjekts. Diese Auffassung unterscheidet sich nicht wesentlich von der des Intuitionismus. Dort liegt zwar der Schwerpunkt auf der Konstruierbarkeit, aber diese findet ebenfalls im menschlichen Geist statt und bedarf der Zeichen ebenfalls nur zu Mitteilung.

[21] Raatikainen (Raa03a) zitiert Brouwer zu diesem Thema: „Correctnes of an assertion then has no other meaning than that its content has in fact appeard in the consciousness of the subject.“

[22] In Hilberts Worten : „Taking the principle of excluded middle from the mathematician would be the same, say, as proscribing the telescope to the astronomer or to the boxer the use of his fists.“ Zitiert nach (Bri03)

[23] Siehe (Pec02)

3 Neo-Logizismus

Zalta, der sich ursprünglich mit einer Neu-Formulierung von Freges Arbeit mit den Mitteln der Modallogik befasst hat, schlägt eine Form des Logizismus vor, den er — allerdings mit einem Fragezeichen versehen — Neo-Logizismus nennt. [24]

Er verfolgt dabei den gleichen Grundgedanken wie Frege: Ausgehend von einer minimalen Anzahl von Axiomen wird allein mit logischen Mitteln unter anderem die Arithmetik konstruiert. Der Weg, den er dabei geht, unterscheidet sich allerdings von dem Freges. Zalta startet mit einer axiomatischen und metaphysischen Theorie, die vollkommen frei von Mathematik ist. Diese Theorie bildet die ontologische Basis, auf der alle weiteren Schritte stattfinden. In ihr werden mathematische Objekte, die als eine Sorte von abstrakten Objekten gesehen werden, systematisiert. Es wird dabei gezeigt, daß mathematische Theorien auf sie abgebildet werden können. Zalta bezeichnet diese Theorie daher auch als „Hintergrundontologie“, da sie neben dem notwendigen Formalismus auch die Annahme der Existenz von konkreten und abstrakten Objekten trifft. Sie wird im Folgenden mit $\mathcal{O}$ bezeichnet.

Für sein eigentliches Anliegen, die Rückführung einer mathematischen Theorie auf seine Hintergrundontologie, benutzt Zalta zwei Wege. In früheren Arbeiten führte eine von ihm klassische Reduktion genanntes Verfahren aus. Dabei werden die Axiome von T aus Theoremen von $\mathcal{O}$ hergeleitet. Beim Neo-Logizismus wechselt er das Verfahren und benutzt nun eine metaphysische Reduktion. Hier werden Objekte aus T reduziert auf Objekte von $\mathcal{O}$.

3.1 Prädikation

Eine wichtige Voraussetzung für beide Arten der Reduktion ist eine besondere Form der Prädikation. Zalta unterscheidet dabei zwei Formen, in denen eine Eigenschaft von einem Objekt ausgesagt werden kann.

1. x exemplifiziert F : Fx (externe Prädikation)
   Dabei wird die Eigenschaft extern von dem Objekt ausgesagt. Normale Objekte, wie Tische oder Wolken, haben nur externe Eigenschaften. Diese Form der Prädikation entspricht der klassischen Prädikation.

[24] Zalta stellt den Neo-Logizismus in (Zal00) vor, greift dabei aber auf umfangreiche Vorarbeiten zurück, die er unter anderem in (Zal93) und (Zal99) entwickelt.

2. x determiniert F : xF (interne Prädikation)
   Hierunter werden Objekte verstanden, die interne Eigenschaften haben. Diese Idee geht zurück auf Ernst Mally. Für ihn waren abstrakte Objekte Objekte, die von Eigenschaften bestimmt wurden, ohne sie jedoch befriedigen zu können. So ist ein rundes Quadrat sowohl vom rund-sein, als auch vom Quadrat-sein bestimmt, kann aber weder das Eine, noch das Andere befriedigen. In der hier vorliegenden Prädikation würde das runde Quadrat die Eigenschaften „rund“ und „quadratisch“ determinieren, könnte sie aber nicht exemplifizieren. Es wird ihm in diesem Fall also als interne Eigenschaften zugeschrieben, was es als externe unmöglich besitzen kann. Auch fiktionalen Objekten, wie Sherlock Holmes, können auf diese Weise sinnvoll Eigenschaften zugeordnet werden, denn eine klassische Prädikation ist im Hinblick auf die nur erdachte Existenz eines Romanhelden problematisch.

Durch die Formalisierung dieser Aufspaltung der Prädikation in zwei Arten kann nun wesentlich besser mit abstrakten Objekten umgegangen werden.[25]

Alle Eigenschaften, die ein Objekt determiniert, determiniert es notwendig, also in allen Welten. Damit ist seine Identität eindeutig gesichert und die Feststellung der Identität zweier abstrakter Objekte kann einfach darauf reduziert werden, daß sie genau dieselben Eigenschaften determinieren.

Die durch die Determinierung postulierten Objekte sind nicht realer, sondern abstrakter Natur. Allerdings ist der Status dieser Objekte nicht klar: Handelt es sich um so etwas wie platonische Entitäten oder doch eher reine Fiktionen? Diese Unklarheit zieht eine Reihe von Problemen für den Neo-Logizismus nach sich, wie an späterer Stelle noch gezeigt wird.

Im Zusammenhang mit der Mathematik wird diese Form der Prädikation dadurch relevant, daß sie zum Beispiel auf die Zahlen der Zahlentheorie Peanos anwendet wird. Dann gehört zu den externen Eigenschaften einer Zahl (z.B. der Eins), daß sie in den Gedanken Peanos auftauchte und mit dem Symbol 1 notiert wird. Sowohl mathematisch, als auch philosophisch ist dies natürlich irrelevant. Dort stoßen nur die theoretischen Eigenschaften wie das ungerade oder prim sein auf Interesse. Und genau dies sind die Eigenschaften, die im abstrakten Objekt „Eins“ determiniert sind.

[25] Bis hierher folge ich bei der Beschreibung der Prädikation (Zal93, S.12 ff).

3.2 Beschreibung von $\mathcal{O}$

Die Hintergrundontologie $\mathcal{O}$ bildet wie bereits erwähnt die Basis für die beiden Arten der Reduktion mathematischer Objekte. Ich werde sie daher im Folgenden sehr knapp vorstellen. [26]

$\mathcal{O}$ besteht aus:

- Objekten (typisert)
- Relationen (typisiert)
- Exemplifikation
- Determinierung
- logische und modale Primitive
- dem Prädikat konkret-sein E!
- den Begriffen MathTheory(x) und Autorenschaft

Bis auf die letzten beiden Punkte handelt es sich dabei um rein logische Begriffe. E! und MathTheory(x) stellen Behauptungen auf, nämlich das etwas konkret ist und das ein noch zu spezifizierendes Objekt als mathematische Theorie ausgezeichnet wird. Zalta selbst klassifiziert sie als metaphysisch. Unabhängig von dieser Klassifikation besteht der wesentliche Punkt darin, daß keiner der Begriffe mathematischer Natur ist. $\mathcal{O}$ ist also völlig frei von Mathematik.

Die Hintergrundontologie $\mathcal{O}$ besteht aus den folgenden 6 Axiomen:

I. Die Sphäre der Objekte wird in zwei Bereiche unterteilt: die normalen Objekte O!x, die möglicherweise konkret sind, und die abstrakten Objekte A!x, die nicht konkret sein können. Dazu wird die einstellige Relation konkret sein E! benutzt.

$$O!^{<t>}x^t =_{df} \Diamond E!^{<t>}x^t$$

$$A!^{<t>}x^t =_{df} \Diamond\neg E!^{<t>}x^t$$

Also : Gewöhnliche Objekte sind möglicherweise konkret; abstrakte Objekte sind unmöglich konkret.

[26] Siehe (Zal00, S. 10 f).

II. Gewöhnliche Objekte determinieren keine Eigenschaften.

$$O!^{<t>}x^t \rightarrow \Box\neg\exists F^{<t>}xF$$

III. Umfangsprinzip (comprehension principle): Zu allen Eigenschaften, die einer Formel/Bedingung gehorchen, existiert genau ein abstraktes Objekt, das genau diese Eigenschaften determiniert.

$$\exists x^t(A!^{<t>}x \wedge \forall F^{<t>}(xF \equiv \varphi)), \varphi \text{ hat keine freien } x$$

IV. Identität: Zwei gewöhnliche Objekte sind identisch, wenn sie die gleichen Eigenschaften exemplifizieren; zwei abstrakte Objekte sind identisch, wenn sie die gleichen Eigenschaften determinieren; sie unterscheiden sich, wenn sie sich in mindestens einer Eigenschaft unterscheiden.

$$x^t = y^t =_{df}$$

$$O!^{<t>}x^t \wedge O!^{<t>}y^t \wedge \Box\forall F^{<t>}(Fx \equiv Fy)\vee$$
$$A!^{<t>}x^t \wedge A!^{<t>}y^t \wedge \Box\forall F^{<t>}$$

V. Ein λ-Umformung, die sicherstellt, daß Objekte x^{t_i} nur genau dann die komplexe Relationen *ein* y^{t_i} *sein derart, daß* φ exemplifizieren, wenn die x^{t_i} die Funktion φ erfüllen.

$$F = G =_{df} \Box\forall F(xF \equiv yG)$$

VI. Alles was möglich determiniert wird, wird auch notwendig determiniert.

$$\Diamond x^t F^{<t>} \rightarrow \Box xF$$

Eine Nähe zum Logizismus zeigt sich hier im Umfangsprinzip III, das festlegt, daß für jedes mögliche Bündel von Eigenschaften genau ein abstraktes Objekt existiert, daß diese Eigenschaften determiniert. Wie oben gesehen können dies auch durchaus widersprüchliche Eigenschaften sein. Dieses Umfangsprinzip der abstrakten Objekte ist nach Zaltas Ansicht analog zur logischer Wahrheit zu sehen. Die abstrakten Objekte werden damit logischen Objekten ähnlich.

Wird nun MathTheory(p) mit einer spezifischen Theorie τ instanziert, so kann bewiesen werden, daß mathematische Objekte abstrakte Objekte sind. Durch diese Abbildung einer Theorie τ nach $\mathcal{O}$, das lediglich aus logischen und metaphysischen Begriffen besteht, erfolgt auch eine ontologische Reduktion.

3.3 Klassische Reduktion[27]

Die klassische Reduktion versucht die Axiome mathematischer Theorien als Theoreme von $\mathcal{O}$ abzuleiten, bzw. die primitiven nicht-logischen Begriffe der Mathematik in der Sprache von $\mathcal{O}$ zu definieren. Dies geschieht, indem $\mathcal{O}$ um geeignete Axiome erweitert wird. So benutzt Zalta in (Zal99) $\mathcal{O}$ erweitert um zwei nicht logische Axiome und unter Benutzung der Logik der Aktualität um Freges Definitionen von Vorgänger und 0 zu konstruieren. Damit werden aus den Dedekind-Peano-Axiomen Theoreme.

Für die klassische Reduktion der Dedekind-Peano-Grundgesetze werden die natürlichen Zahlen so definiert, daß sie gewöhnliche nicht-mathematische Eigenschaften determinieren. So determiniert die 0 beispielsweise die Eigenschaft eine Giraffe in der Antarktis zu sein. Man sieht leicht, daß dies dem Fregeschen Begriff der Anzahl nahe kommt. Weitere Objekte aus Freges Werk, wie die Vorgänger-Relation, werden ebenfalls als gewöhnliche Relationen angenommen und mit dem Hilfsmittel der Determinierung definiert.

3.4 Die metaphysische Reduktion[28]

Das Ziel dieser Reduktion ist es zu beweisen, daß mathematische Objekte abstrakte Objekte sind. Es soll also eine ontologische Bestimmung stattfinden, die auf der Basis eines Beweises und nicht unter Verwendung einer Stipulation arbeitet.

Es geht im Kern um die philosophische Analyse von einfachen und wahren mathematischen Sätzen der Form *In der mathematischen Theorie T, p (ist wahr)*. Als Beispiel kann dienen *In der Theorie der realen Zahlen, π ist größer als 3*. Der Nachsatz *p (ist wahr)*, oder im Beispiel *π größer als 3*, sind Aussagen der normalen mathematischen Sprache. Von größerem Interesse ist der Präfix

[27] Siehe (Zal00, §1)

[28] Zalta führt die metaphysische Reduktion in (Zal00) mehrfach durch. Nachdem er sie in § 2 allgemein beschreibt, führt es sie in § 4.2 für die Objekte der Mengenlehre, in § 4.3 für die Theorie der ganzen Zahlen und schließlich in § 4.4 für allgemeine mathematische Theorien aus

In der mathematischen Theorie T, den Zalta als Theorie Operator sieht und der mit Hilfe eines formalen Begriffes in $\mathcal{O}$ übersetzt wird.

Nimmt man eine Aussage wie π *ist irrational* ohne den Präfix *In der Theorie der realen Zahlen*, so hat sie zwei Lesarten, die sich widersprechen:

1. Die Aussage ist wahr, wenn angenommen wird, daß irrational-sein eine Eigenschaft ist, die von π determiniert wird, so ist der Satz wahr.

2. Andererseits wird der Satz falsch, wenn das irrational-sein als ein von π exemplifizierte Eigenschaft angenommen wird. Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß das irrational-sein für sich genommen intern ist. Extern kann es nur als Bestandteil/Zuschreibung innerhalb einer Theorie sein.

Erst durch die Verwendung des Präfix löst sich der Widerspruch auf. Für die metaphysische Reduktion wird $\mathcal{O}$ um eine mathematische Theorie τ erweitert, die aus Konstanten, Relationen und Axiomen besteht.

Die Vorbereitung für die Reduktion spielt sich in drei Schritten

1. Zunächst wird $\mathcal{O}$ um die Konstanten und Relationen von τ erweitert. Dabei spielt auch τ selbst die Rolle einer Konstanten.

2. Als Nächstes werden alle Axiome der Theorie in $\mathcal{O}$ als analytische Wahrheiten der Form $\tau \models \varphi*$ formuliert. Dabei bezeichnet φ die Axiome in τ und $\varphi*$ dieselben Axiome, nachdem in ihnen alle Konstanten und Relationen durch die in $\mathcal{O}$ definierten ersetzt wurden. Durch diese Operation werden die Axiome zu analytischen Wahrheiten innerhalb von $\mathcal{O}$.
   Falls eine Theorie den Operator $=$ benötigt, so muss τ um zwei Axiome erweitert werden:[29]
   $$\tau \models x =_\tau x$$
   $$\tau \models x =_\tau y \rightarrow \forall F(Fx \equiv Fy)$$

3. Als Letztes wird noch die Behauptung $\mathrm{MathTheory}(\tau)$ hinzugefügt.

Danach folgt die eigentliche Reduktion, die bei jeder mathematischen Theorie nach dem gleichen Schema abläuft und analoge Ergebnisse liefert:

- Die Konstanten werden reduziert auf abstrakte Individualien.

[29] Der im Folgenden benutzte Operator $=_\tau$ behauptet keine Identität, sondern sagt lediglich aus, daß die damit verknüpften Individualien aus τ die gleichen Eigenschaften exemplifizieren.

- Eigenschaften und Relationen werden ebenfalls auf abstrakte Individualien reduziert.
- Die Theorie selbst kann aufgrund der Annahme MathTheory(τ) als abstrakte Individualie identifiziert werden.

Das wesentliche Ergebnis der Reduktion besteht darin, daß jedes mathematische Objekt genau die Eigenschaften determiniert, die es in τ exemplifiziert.

Bei der metaphysischen Reduktion geht es also darum, daß gezeigt werden kann, welchen metaphysischen Status die Objekte einer beliebigen mathematischen Theorie haben. An dieser Stelle fließt ein prätheorethisches Wissen darum ein, welche Konstanten und Prädikate zur Mathematik und welcher zur Logik gehören. So ist es beispielsweise heute im Allgemeinen unbestritten, daß die Axiome der Mengenlehre der Mathematik und nicht der Logik zuzuordnen sind. Mit dieser prätheoretischen Abgrenzung findet ein bis zu einem gewissen Grad willkürliches Element Einzug in Zaltas Theorie: was eine mathematische Theorie ist, wird nicht bewiesen, sondern definiert.

3.5 Unterschiede zwischen der klassischen und der metaphysischen Reduktion

Die Differenz zwischen klassischer und metaphysischer Reduktion zeigt sich deutlich in dem unterschiedlichen Status der natürlichen Zahlen:

- Mit der klassischen Reduktion wurden aus den Dedekind-Peano-Grundgesetze Theoreme in $\mathcal{O}$, die schlicht wahr sind.[30]
- Bei der metaphysischen Reduktion determinieren die natürlichen Zahlen nur noch Eigenschaften, die ihnen bezogen auf das Theoriesystem (hier der natürlichen Zahlen) zukommt. Eine Eigenschaft wie Giraffe-in-der-Antarktis-sein gehört nicht mehr dazu. So sind sie nicht mehr einfach wahr wie bei der klassischen Reduktion sondern nur noch, wenn ihnen der zugehörige Theorieoperator als Präfix vorangestellt wird. Die mathematische Theorie bildet also ein formales System, das durch die Übersetzung in $\mathcal{O}$ ontologisch interpretiert wird.[31]

[30] Siehe (Zal00, S. 5 ff).
[31] Siehe (Zal00, S. 22 ff).

4 Ist der Neo-Logizismus ein Logizismus?

Damit Zaltas Entwurf zu Recht Neo-Logizismus genannt werden kann, dürfen die Axiome von $\mathcal{O}$ allein logischer Natur sein. In zwei Fällen ist diese Voraussetzung wenn nicht verletzt, doch nur mit problematischen Annahmen aufrechtzuerhalten:

1. Das Prädikat E! ist nicht logisch, da das konkret-sein nicht auf Anhieb eine Eigenschaft ist, die in allen möglichen Welten wahr ist. Nur wenn dieses Prädikat notwendig in allen möglichen Welten wahr wäre, so könnte von einer logischen Wahrheit gesprochen werden. Nur mit der Einschränkung allein die Welten zuzulassen, die der unseren so ähnlich sind, daß die gleichen Dinge konkret sind, könnte das Prädikat in den Status einer beinahe logischen Wahrheit erhoben werden. Aber beinahe logisch ist nicht logisch.

2. Zalta wertet das Umfangsprinzip für abstrakte Objekte, mit dem die Existenz eines Objektes für jedes mögliche Eigenschaftsbündel behauptet wird, als eine Wahrheit, die synthetisch a priori ist. Auf dem Hintergrund der üblichen Lesart von $\exists$ (für eine alternative Interpretation s.u.) ist das zwangsläufig so: eine Existenzbehauptung kann nicht analytisch sein, da die durch sie behaupteten Objekte ihre Existenz allein aufgrund der Behauptung erlangen und nicht aufgrund einer tautologischen Umformung. Das wird auch nicht dadurch entschärft, daß es sich nicht um reale, sondern lediglich um abstrakte Objekte handelt. Die Behauptung setzt also eine Art „zusätzliches Wissen“, das über das System hinausgeht, voraus. Und da es sich in diesem Fall auch nicht um a posteriorisches Wissen handeln kann (mathematische Objekte sind ja schließlich weder greif- noch messbar), bleibt nur die Möglichkeit, daß es sich um ein synthetisches Wissen a priori handelt.

Das zweite Problem lässt sich durch eine Umformulierung der Axiome von $\mathcal{O}$ entschärfen, aber es wird nicht einer endgültigen Lösung zugeführt. Wie bei vielen axiomatischen Systemen besteht eine gewisse Freiheit in der Zuordnung welche Sätze als Theoreme und welche als Axiome gewählt werden. So auch hier. Das Umfangsprinzip III. kann durch eine definite Beschreibung ersetzt werden:

VII. $\imath x^t A!^{<t>}x \wedge \forall F^{<t>}(xF \equiv \varphi)G^{<t>} \equiv \varphi^{G^{<t>}}_{F^{<t>}}$

Ursprünglich ging VII als Theorem aus dem Umfangsprinzip III hervor; durch die Ersetzung ist es genau umgekehrt. Betrachtet man dieses Axiom, so fällt auf, daß es beinahe eine Tautologie darstellt. Denn es legt fest, daß das abstrakte Objekt, welches genau die Eigenschaften determiniert, die einer Funktion φ gehorchen, genau dann eine Eigenschaft G determiniert, wenn G die Funktion φ befriedigt. Wenigstens in dieser umgangsprachlichen Definition ist das eine Tautologie und wäre somit eine analytische bzw. logische Wahrheit. Als Folge davon würde sich der ontologische Status der Theorie ändern. Denn akzeptiert man dieses Axiom zusammen mit allen anderen aus $\mathcal{O}$ als analytisch, so handelt es sich tatsächlich um einen sehr umfassenden Logizismus, der jede beliebige mathematische Theorie auf Logik zurückführt. Allerdings erhebt Zalta selbst nicht den Anspruch, daß dieses Axiom tatsächlich analytisch ist, sondern verweist darauf, daß einige Philosophen Prinzipien, die zu VII analog sind, für analytisch halten. Explizit nennt er hier eine Arbeit von Wright, der dafür argumentiert, daß Humes Prinzip eine analytische Wahrheit ist. Dies ist offensichtlich ein sehr umstrittener Standpunkt, zumal es unter dieser Voraussetzung keines Neo-Logizismus bedurft hätte. Denn wie schon oben erwähnt scheiterte Frege ja an der Herleitung des Humeschen Prinzips aus der Logik. Wenn dieses Prinzip also schon von vorne herein als analytisch anerkannt wird, so bedurfte es nicht eines Grundgesetzes V und der Logizismus wäre gerettet.

Damit wird aber deutlich, daß der Neo-Logizismus in zwei Fällen von Axiomen abhängig ist, die nur als beinahe logische zu werten sind. Das Fragezeichen, das Zalta dem Begriff Neo-Logizismus mit auf den Weg gibt, ist also nur zu berechtigt.

Was aber vermag seine Theorie zu leisten, wenn der Anspruch eine moderne Form des Logizismus zu sein aufgegeben werden muß?

5 Probleme

In diesem Abschnitt werde ich auf die verschiedenen Probleme des Neo-Logizismus eingehen um zum Schluß anhand der drei bisherigen Hauptrichtungen bei der Lösung der Grundlagenkrise zu untersuchen, ob er Beiträge zu einer neuen Sicht der Dinge liefert.

5.1 Der Existenzquantor

Der Existenzquantor, dessen alternative Lesart bereits die für die Entwicklung des Intuitionismus wesentlich war, kann auch im Neo-Logizismus auf zwei unterschiedliche Weisen aufgefasst werden.

1. $\exists$ als „es-existiert": Dies ist die klassische Version, die in Bezug auf den Neo-Logizismus besagt, daß es Objekte gibt , die unmöglich konkret sein können. Genau so wurden die abstrakten Objekte von Zalta eingeführt und benutzt. Mit dieser Interpretation wird eine platonische Sicht der Dinge behauptet, denn man weiß etwas von Objekten, die vom Subjekt unabhängig sind. Und analog zu platonischen Ideen sind auch sie nicht konkret, aber in ihrer abstrakten Existenz durchaus wirklich. Es kann sich unter dieser Voraussetzung nur um ein synthetisches Wissen a priori handeln. Dies ist die Interpretation, die sich mit Freges Ansicht deckt, so daß mit der Behauptung der Existenz von abstrakten Objekten sicher zu Recht die Rede von einem Neo-Logizismus ist.

2. $\exists$ als „da-ist" (ohne Existenz zu behaupten) : In dieser Version des Quantors werden aus den abstrakten Objekten Fiktionen. Sie basiert darauf, daß unter dem Existenzquantor nicht die Behauptung es existiert verstanden wird, sondern die nicht mit einer Existenzbehauptung verbundene Lesart „da ist".[32] Damit werden die mathematischen Objekte zu Fiktionen.

In der fiktionalen Form lässt sich aus meiner Sicht eine Annäherung an den Intuitionismus feststellen. Ein zentraler Standpunkt des Intuitionismus ist es ja, daß die mathematischen Objekte gedanklich konstruiert werden können. Aber genau das macht auch eine Fiktion aus. Wenn also von fiktionalen mathematischen Objekten die Rede ist, so könnte ohne Schwierigkeiten z.B. ein Beweis,

[32] Siehe (Zal00, S. 37).

den ich gerade in meinen Gedanken durchführe, darunter gefasst werden. Aber so nahe liegend das ist, so müssen doch auch die anderen Elemente des Intuitionalismus Berücksichtigung finden. Daraus folgt die Forderung, daß sich Zaltas Hintergrundontologie $\mathcal{O}$ und alle Ableitungen daraus auch mit intuitionistischer Logik, also ohne Verwendung des Tertium non datur, formulieren lassen.

5.2 Zur Rolle der Logik

Frege räumte der Logik erkenntnistheoretisch einen sehr hohen Stellenwert ein. Das ist ein Gedanke, der sicher durch die zu seiner Zeit noch überragende Bedeutung des aristotelischen Systems nahe liegt. Aber nicht zuletzt durch Freges eigene Arbeit ist dieses monolithische System der Logik mit seinem Ausschließlichkeitsanspruch einem ganzen Bündel von logischen Systemen verschiedene Prädikatenlogiken, mehrwertige Logik, Modallogik etc. gewichen. Das hatte aber auch zur Folge, das der Anspruch auf endgültige Wahrheit in dem Maße relativiert werden mußte, in dem ihre Grundlagen in Frage gestellt wurden und genauer nach der Anwendbarkeit gefragt wurde. Die intuitionistische Logik ist das beste Beispiel dafür, indem sie in Bezug auf die Mathematik ein grundlegendes Prinzip zurückweist. Und auch beim Aufbau modallogischer Modelle werden die Axiome gemäß dem Modellzweck ausgewählt. Noch weiter gehen die mehrwertigen Logiken, wo der komplette Apparat für eine bestimmte Anwendung ausgewählt wird. Auf diese Weise verliert auch die (Prädikaten)logik viel von ihrem erkenntnistheoretischen Anspruch, den Frege ihr noch zubilligte. Sie wird zu einem Mittel der Beschreibung und erhält den Charakter eines Werkzeuges.

5.3 Was ist ein abstraktes Objekt?

Ein wesentliches Anliegen Zaltas besteht darin, daß mit Hilfe seiner Theorie nicht mehr nur stipuliert werden muss, daß mathematische Theorien abstrakte Objekte sind, sondern daß dies jetzt vielmehr bewiesen werden kann. Es erhebt sich allerdings die Frage, welchen Vorteil dies bringt, denn seine Definition von abstrakt-sein als nicht-konkret-sein ist ebenso naheliegend, wie breit. Selbst der Platonismus würde mit unter dieses Dach passen, denn schon Platon selbst sieht die Ideen und dazu gehören ja auch die idealen mathematischen

Objekte zwar als wirklich, aber durchaus nicht als konkret in unserer Umwelt verwirklicht an.

Was also notwendig wäre, ist die Klärung, was denn unter dem allgemeinen Begriff abstrakt in Bezug auf die Mathematik zu verstehen ist. Aber genau das wird nicht geleistet.

5.4 Finite Mathematik

Gegenüber der Frage, wie mit infiniten Totalitäten umgegangen werden soll, bleibt der Neo-Logizismus neutral; Zalta äußert sich dazu nicht. Damit bleiben aber für mich wesentliche Fragen, wie die nach der Entscheidbarkeit von Problemen, unbeantwortet. Das ist irritierend, denn es werden ja Aussagen bezüglich der Existenz von Objekten getroffen, die durchaus nicht alle im endlichen Bereich anzusiedeln sind. Es ist überraschend, daß die (Un)endlichkeit von Verfahren nicht erwähnt wird und sowohl finite, als auch infinite Totalitäten gleich behandelt und den selben ontologischen Status zugewiesen bekommen.

5.5 Was sind mathematische Theorien?

Da mathematische Theorien T nur aus wahren Sätzen bestehen können, trifft Zalta die folgende Definition: Unter der Voraussetzung, daß p eine wahre Proposition in T ist, determiniert T diese Eigenschaft. Da darüber hinaus mathematische Theorien beweistheoretisch geschlossen sein müssen, muß dann auch jede Konsequenz aus den Propositionen wieder wahr sein. Eine mathematische Theorie T ist also das abstrakte Objekt, das genau die Propositionen determiniert, die in T wahr sind.[33]

Wie oben angesprochen führt Zalta das, was als mathematische Theorie anerkannt wird, per Definition ein. Theorien werden quasi als fertiges Paket geliefert und in $\mathcal{O}$ zur Bestimmung ihres Status eingesetzt. Die Festsetzung, was als Mathematik und was als Logik bezeichnet wird, findet letztlich in der *scientific community* statt, ist aber nicht endgültig, sondern Diskurs- und damit Zeit-abhängig (wie die Diskussion um den Status der Axiome der Mengenlehre vor einigen Jahrzehnten gezeigt hat). So wird dann auch die Frage, ob die Logik vielleicht ein Teilgebiet der Mathematik ist, ignoriert. Das Untersuchungssystem ist fast rein logisch, in jedem Fall aber Mathematik-frei; das

[33] Siehe (Zal00, S. 13).

untersuchte System hingegen bleibt abhängig vom Diskurs. Dem Gedanken einer endgültigen Klärung und Festlegung widerspricht das.

5.6 Eine Lösung der Grundlagenkrise?

Zwar zeigt es sich, daß es sich beim Neo-Logizismus nur in einer eingeschränkten Sprechweise um einen Logizismus handeln kann, aber dennoch bleibt die Frage, ob sich mit Hilfe von $\mathcal{O}$ die Grundlagenkrise lösen läßt. Dazu müßten wenigstens Lösungswege, besser noch Lösungen für die Sackgassen der drei klassischen Ansätze angeboten werden.

Logizismus

Der Logizismus hat das Problem, das der Begriff der Identität, bzw. des Begriffsumfangs fehlerhaft gelöst wurde. Zalta benutzt zwei Methoden um dieser Schwierigkeit zu begegnen.

1. Die gesamte Theorie wird Typ-theoretisch aufgebaut. So umgeht er, der Idee Russells folgend, Schwierigkeiten bei Selbstanwendungen. Der nämlich löste ähnliche Antinomie bei der Entwicklung der Pricipia Mathematica durch die Einführung der Typtheorie, die bei ihren Elementen quasi verschiedene Hierarchiestufen unterscheidet: Elemente, Mengen von Elementen, Mengen von Mengen etc.

2. Wertverläufe und Begriffsumfänge werden nicht benutzt. Statt sich auf das Subjekt zu konzentrieren, also sich um die Frage zu kümmern welche Objekte unter einen Begriff fallen, geht Zalta den Weg über die Eigenschaften. Ein Objekt wird eindeutig über seine externen und internen Eigenschaften bestimmt. Zwei Objekte sind identisch, wenn alle Eigenschaften identisch sind. „5 = Julius Cäsar“ ist falsch, da beide Objekte über unterschiedliche Eigenschaften verfügen. Aber braucht es dann nicht Eigenschaftsumfänge? Nein, denn es reicht aus, daß die Eigenschaften immer gleich benutzt werden.

Somit sind zwar diese beiden Probleme innerhalb von Zaltas Theorie gelöst, aber da die Theorie selbst wiederum nicht rein logisch ist, kann sie auch nicht dem Logizismus zum Durchbruch verhelfen. Dennoch wird die Theorie nach meiner Einschätzung in einem gewissen Sinne Freges Ansinnen gerecht: sie bietet einen klaren logischen Rahmen, in dem die metaphysischen von den logischen Axiomen gut trennbar sind und auf den mathematische Theorien zurückführbar sind. Auch wenn damit der rein logischen Ableitung eine Absage erteilt wird, so ist wenigstens klar, auf welche metaphysischen Axiome man sich stützen muß. Allerdings birgt die Interpretation dieser Axiome wie oben schon angesprochen erhebliche Probleme. Auf der anderen Seite ist aber auch die axiomatische Grundlage Mathematik-frei. Und dies ist ja auch die Verwandschaft, die Zalta mit dem Logizismus sieht: die Ableitung der Mathematik aus einer Grundlage, die defnitiv nicht der Mathematik angehört.

Eher im Sinne Freges und des Logizismus wäre sicher die klassische Reduktion, die Zalta in einer früheren Schrift durchgeführt hat. Aber auch sie basiert auf der Hintergrundontologie $\mathcal{O}$ und erbt auf diese Weise auch die meisten der hier aufgeführten Schwierigkeiten.

Formalismus

Seit Gödel ist klar, daß ein hinreichend mächtiges mathematisches System bezüglich seiner Beweisbarkeit immer unvollständig sein wird. Das Unvollständigkeitstheorem setzt allerdings auf einer Ebene an, die für den Logizismus wiederum nur als Ziel interessant ist: einer Theorie der natürlichen Zahlen, wie z.B. die Peano-Arithmetik. Denn die Zählbarkeit und damit die Zahlen, die für Gödel Voraussetzung seines Beweises sind, waren für Frege noch ein wesentlicher Teil der zu klärenden Grundlagen. Aber dennoch erwächst nach meiner Ansicht auch dem Logizismus ein Problem aus dem Unvollständigkeitstheorem: Gelänge die Ableitung der Peano-Arithmetik aus der Logik allein, so wäre damit gezeigt, daß sich allein mit den Mitteln der Logik Zählbarkeit realisieren lässt. Aber dann wäre Gödels Beweis auch auf die Logik anwendbar und sie sähe sich mit der gleichen Unvollständigkeit konfrontiert.

Aber dies leistet der Neo-Logizismus nicht. Es wird nicht die Arithmetik allein aus der Logik abgeleitet, so wie es noch Frege vorschwebte, sondern allein der Status von mathematischen Objekten geklärt.

Intuitionismus

Nach meiner Einschätzung ließe sich über die fiktionale Interpretation des Existenzoperators zwar eine Nähe des Neo-Logizismus zum Intuitionismus konstruieren, aber andererseits kann die Hintergrundontologie $\mathcal{O}$ für den Intuitionisten nur dann akzeptabel sein, wenn sie in ihrer formalen Präsentation auf das Tertium non datur verzichtet. Sie müsste sich also mit intuitionistischer Logik reformulieren lassen. Aber damit allein ist es nicht getan, denn als mathematische Theorien können auch nur die Theorien eingesetzt werden, die selbst wieder mit intuitionistischer Logik formuliert worden sind.

Darüber hinaus wäre es sehr fraglich, ob ein Intuitionist die metaphyischen Annahmen und das Ignorieren der infiniten Aspekte hinnehmen würde.

6 Fazit

Zalta kann für sich beanspruchen, daß er die Frage nach dem ontologischen Status mathematischer Objekte den Mathematikern in einer für sie besonders geeigneten Sprache präsentiert. Nur bleibt die Antwort trotz aller mathematischen Präzision und Eleganz philosophisch unbefriedigend, denn sie ist je nach gewählten Voraussetzungen sehr unterschiedlich.

Sowohl das Umfangsprinzip, als auch der Existenzquantor lassen sich wie gesehen unterschiedlich auffassen. Daraus folgt aber auch, daß der Neo-Logizismus nicht wirklich eine Entscheidung über den Status mathematischer Objekte liefert. So wird zwar eine vollständige Beweisführung gegeben, die eine präzise Aussage über den Status der Objekte erlaubt, allerdings hat sie eine entscheidende Schwäche: Zwar wird eindeutig geklärt, daß mathematische Objekte abstrakte Objekte sind, aber der Status der abstrakten Objekte bleibt für die Interpretation offen.

Der Neo-Logizismus findet sich so unversehens an einer Stelle wieder, die der Deduktivismus ganz bewusst einnimmt: Es bleibt dem professionellen Betrachter überlassen, welchen Isomorphismus er dem Formalismus überstreift. Die Ontologie der Mathematik zu formalisieren hat Zalta unzweifelhaft für zustande gebracht. Aber einen schlüssigen Isomorphismus, was also die Abstraktheit mathematischer Objekte meint, bleibt er schuldig. Zwar finden sich Antwortmöglichkeiten und auch seine Präferenz für eine dieser Möglichkeiten, aber eine Lösung ist das nicht. Betrachtet man darüber hinaus die vielen in den letzten 100 Jahren heftigst diskutierten Fragen, die Zalta nicht einmal anspricht, so bleibt eine interessante Formalisierung, aber sicherlich keine Lösung der Grundlagenkrise übrig.

Literatur

[Att03] ATTEN, Mark van: Luitzen Egbertus Jan Brouwer. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.)* (2003). http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/brouwer/

[Bri03] BRIDGES, Douglas: Constructive Mathematics. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.)* (2003). http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/mathematics-constructive/

[Fre84] FREGE, Gottlob: *Grundlagen der Arithmetik*. Breslau, 1884

[Fre93] FREGE, Gottlob: *Grundgesetze der Arithmetik*. Jena, 1893

[Fre18] FREGE, Gottlob: Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. In: *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus* I (1918), S. 58–77

[Hof79] HOFSTADTER, Douglas R.: *Gödel,Escher,Bach*. New York : Basic Books, 1979

[Pec02] PECKHAUS, Volker: Impliziert Widerspruchsfreiheit Existenz? Oskar Beckers Kritik am formalistischen Existenzbegriff. (2002). http://hrz.uni-paderborn.de/~apeck1/texte/becker_hilbert.pdf

[Raa03a] RAATIKAINEN, Panu: Conceptions of Truth in Intuitionism. (2003). http://www.helsinki.fi/collegium/eng/Raatikainen/Intuitionism.pdf

[Raa03b] RAATIKAINEN, Panu: Hilberts's Program revisited. In: *Synthese* 37 (2003), 157-177. http://www.helsinki.fi/collegium/eng/Raatikainen/HilbertsProg.pdf

[Ste01] STEPANIANS, Markus: *Gottlob Frege zur Einführung*. Hamburg : Junius, 2001

[Ver04] VERSCHIEDENE: Philosopy of Mathematics. In: *Wikipedia* (2004). http://en.wikipedia.org/w/wiki.phtml?title=Philosophy_of_mathematics

[Zac03] ZACH, Richard: Hilbert's Program. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.)* (2003). http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/hilbert-program/

[Zal91] ZALTA, Edward N.: A Theory of Situations. In: *Situation Theory and Its Applications, J. Barwise, J. Gawron, G. Plotkin, and S. Tutiya (eds.)* (1991), S. 81–111. – Stanford: Center for the Study of Language and Information Publications

[Zal93] ZALTA, Edward N.: Twenty-Five Basic Theorems in Situation and World Theory. In: *Journal of Philosophical Logic* 22 (1993), 385-428. http://mally.stanford.edu/twenty-five.pdf. – durchgesehene und erweiterte Ausgabe von (Zal91)

[Zal99] ZALTA, Edward N.: Natural Numbers and Natural Cardinals as Abstract Objects: A Partial Reconstruction of Frege's Grundgesetze in Object Theory. In: *Journal of Philosophical Logic* 28/6 (1999), 619-660. http://mally.stanford.edu/numbers.pdf

[Zal00] ZALTA, Edward N.: Neo-Logicism? An Ontological Reduction of Mathematics to Metaphysics. In: *Erkenntnis* 53/1-2 (2000), 219-265. http://mally.stanford.edu/neologicism.pdf

[Zal04] ZALTA, Edward N.: Gottlob Frege. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2004 Edition), Edward N. Zalta (ed.)* (2004). http://plato.stanford.edu/archives/spr2004/entries/frege/